



Munich Personal RePEc Archive

Isomorphism and homomorphism in simulation

Mikhail I. Rummyantsev

Zakhidnodonbaskiy institute of economics and management

11. November 2011

Online at <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/48633/>

MPRA Paper No. 48633, posted 27. July 2013 14:04 UTC

УДК 004.94:336:512

Румянцев М.И.

ИЗОМОРФИЗМ И ГОМОМОРФИЗМ В ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Западнодонецкий институт экономики и управления

Обсуждается роль понятий «изоморфизм» и «гомоморфизм» для теории и практики имитационного моделирования. Эти понятия рассматриваются как методологическая основа процедур оценки уровня адекватности модели и степени ее пригодности для исследования и совершенствования экономических систем, объектов и процессов.

Ключевые слова: бизнес-процессы; имитационное моделирование; адекватность; изоморфизм; гомоморфизм.

The paper deals with the role of the isomorphism and homomorphism in the theory and practice of simulation. These concepts are considered as a methodological framework for models adequacy evaluation and for their suitability extent estimation to the study and improvement of economic systems, objects and processes.

Keywords: business-processes; simulation; adequacy; isomorphism; homomorphism.

Введение

Как показала более чем полувековая практика имитационного моделирования экономических систем, объектов и процессов, вопросы адекватности и пригодности создаваемых моделей всегда занимали подобающее им место в теоретических исследованиях и практических приложениях (см., например, [5, 12, 17]). Разумеется, пропагандируемые представителями различных школ и направлений концепции и методы нередко «ортогональны» друг другу. Признавая право каждого исследователя на

самостоятельность суждений, хотелось бы отметить некую, не всегда заметную, небрежность или недоработанность методологического обоснования технологических аспектов имитационного моделирования. В частности, одним из косвенных свидетельств тому может служить определение понятия модели, которое дал Ю.И. Рыжиков, автор широко известной и заслуженно популярной книги «Имитационное моделирование. Теория и технологии»: «Модель есть материально или теоретически сконструированный объект, который заменяет (представляет) объект исследования в процессе познания, находится в отношении сходства с последним (изоморфизм, аналогия, физическое сходство и т.п.) и более удобен для исследования» [12, с. 16]. Определенная гносеологическая неточность приведенного определения (касающаяся неоправданной подмены гомоморфизма изоморфизмом) вынудила автора настоящей работы продолжить начатое в [10, 11] обсуждение подходов к оценке адекватности имитационных моделей – в частности, к выяснению концептуальной и инструментальной роли понятий изоморфизма и гомоморфизма в современном имитационном моделировании.

Базовые идеи и приближение к окрестностям решения

Что такое модель в алгебраическом смысле? Это объект, находящийся в некоторых отношениях с исходным объектом – безотносительно того, что представляет собой объект-оригинал: некое абстрактное множество, вполне конкретный убыточный завод или восточный базар. Такое понимание модели имеет свои давние математические корни. Более того, среди математиков есть мнение, что, грубо говоря, построение модели любой предметной области начинается с «...введения подходящих обозначений для операций и отношений с последующим исследованием их свойств» [8, с. 51].

Этот подход достаточно распространенный и имеющей под собой солидное обоснование. В свое время А.И. Кухтенко показал, что любая произвольная математическая модель представима в виде некоторой алгебраической структуры – и, как следствие, в любой предметной области

возможен переход от содержательных представлений к математическим моделям, выраженным при помощи стандартных алгебраических структур [6]. Такая концепция во многом созвучна работам Н.П. Бусленко [2], В.М. Глушкова [4], М. Месаровича и Я. Такахары [7], ряда других исследователей. Таким образом, группы, кольца, поля и другие структуры подобного рода все чаще находят применение в качестве математических аналогов реальных объектов и систем. Алгебраические операции, абстрагируясь, распространяются на объекты любой природы, которые образуют различные структуры в зависимости от приписываемых им или наблюдаемых свойств. Поскольку приложение идей абстрактной алгебры к проблемам моделирования неминуемо предполагает изучение логических и семиотических аспектов моделирования, следует также особо отметить работы в этом направлении А.И. Умова и Ю.А. Гастева. В частности, последний занимался вопросами, связанными с алгебраическими аспектами теории познания и такими логико-гносеологическими категориями, как изоморфизм и гомоморфизм [3].

Наша задача проще и прагматичнее – вычленив из теоретического многообразия то, что применимо (возможно, с определенными оговорками) в практическом имитационном моделировании – поэтому остановимся более подробно на некоторых методологических тонкостях, которые присущи взаимоотношениям процесса научного познания, общей алгебры и моделирования. Это необходимо сделать еще и потому, что абстрагирование как неотъемлемая технологическая операция при моделировании базируется на принятых априори предположениях относительно элементов объекта-оригинала, их свойств и соотношений. Выбрав эти предположения в качестве системы аксиом для конкретной предметной области, можно, во-первых, заложить в фундамент будущей имитационной модели аксиоматизированной области *интерпретацию (модель) системы аксиом* [15, с. 41]; во-вторых, воспользоваться тем обстоятельством, что построение модели для некоторой определенной аксиоматической системы может быть во многих случаях осуществлено конструктивным образом (например, при помощи некоторой

итерационной процедуры) [там же, с. 59]. Это вполне соответствует отработанным приемам имитационного моделирования — когда первоначальная, грубая модель циклически подвергается многократному уточнению по мере проведения экспериментов с ней, выполнения верификации, валидации и т.д. Опираясь на схему Ю.А. Гастева, можно описать в максимально обобщенной форме (без отвлекающей детализации) *процедуру отражения* структур и их свойств из некой предметной области — памятуя о том, что хотя бы некоторые шаги этой процедуры могут и должны быть автоматизированы (компьютеризованы).

(i) Из всей совокупности процессов отражения изучаемой области определенным образом *вычленяются единичные («элементарные») акты познания*, допускающие описание в логико-алгебраических терминах как самих себя, так и результатов. Множество этих описаний образует очередную, *i*-ую итерацию, асимптотически приближаясь к более тонкому, комплексному описанию объектов предметной области, намеченной к имитационному моделированию. Говоря инженерным языком, единый технологический процесс отражения расщепляется на составные технологические операции сколь угодно допустимой малости.

(ii) Основные категории «элементарно-познавательной» концепции по Гастеву — понятия изоморфизма и гомоморфизма, неразрывно связанные с важнейшей операцией отождествления различных по сути объектов. В этих терминах *описывается образование отдельных абстрактных понятий и построение целостных концептуальных схем — моделей*. Поскольку модель является не столько объективным атрибутом какой-либо сущности, сколько субъективным продуктом чьего-то моделирования, то изоморфизм понимается как некий идеальный, «предельный» случай более широкого и более «употребительного» понятия гомоморфизма. «...Изоморфизм есть понятие «абсолютное» — этим термином мы обозначаем взаимно-однозначное соответствие между элементами двух абстрактных множеств, «сохраняющее» все свойства элементов этих систем и все отношения между ними» [3, с. 24].

(iii) Процесс выделения и систематизации абстрактных понятий, отражающих свойства окружающего мира, можно интерпретировать как некоторое *гомоморфное преобразование (свертку)*, а процесс формализации уже построенной таким образом концептуальной схемы в виде научной теории (и создаваемых на ее основе прикладных технологий и инструментов) — как *изоморфное преобразование*. Таким образом, до начала этапа (ii) исследователь уже должен располагать необходимым аппаратом для выполнения преобразований обоих видов. Очевидно, что возможности логико-алгебраических методов должны быть подкреплены и дополнены некоторыми эвристиками, характерными для экспертов в данной предметной области. В силу этого *функции по гомоморфной свертке значимой информации* (описаний бизнес-процессов, бизнес-правил и т.п.) *должны быть возложены на компьютеризованную экспертную систему (ЭС) с элементами искусственного интеллекта*.

(iv) Несколько слов о том, с какой стороны подступиться к реализации в ЭС упомянутой свертки. Любой гомоморфизм означает не что иное, как объединение в классы эквивалентности совокупностей объектов, могущих различаться по другим критериям отождествления. (По мнению Гастева, в этом вся теоретико-познавательная суть так называемых теорем о гомоморфизмах, сводящаяся, упрощенно говоря, к тому, что *единственным объективным источником описания реальности служит сама эта реальность*).

Насколько правомочно такое понимание изоморфизма и гомоморфизма применительно к моделированию? Рассмотрим сначала чисто математический подход к этому вопросу. Один из «патриархов» отечественной алгебры, А.К. Сушкевич, в работах 20-30-х годов XX столетия вводил понятия изоморфизма и гомоморфизма, отталкиваясь от предшествующего им понятия группы и опираясь на труды О.Ю. Шмидта по абстрактной теории групп. Таким образом, изоморфизм у Сушкевича – это соотношение между элементами двух групп U и U_1 , в котором каждому элементу группы U соответствует некоторый элемент группы U_1 , и каждому элементу из U_1 соответствует некоторый элемент из U , причем произведению двух элементов из U соответствует произведение соответствующих элементов из U_1 . Если при этом каждому элементу из U_1 соответствует только один элемент из U и обратно, то изоморфизм простой, в противном случае обобщенный (кратный,

гомоморфизм). Простой изоморфизм говорит, что структуры групп одинаковы, т.е. с отвлеченной точки зрения группы ничем не отличаются друг от друга.

Подобного рода формулировки характерны и для других математиков. Так, П. Халмош в своем известном учебнике 40-50-х годов «Конечномерные векторные пространства» подразумевает под изоморфизмом взаимно однозначное соответствие, сохраняющее все линейные соотношения. На первый взгляд это и аналогичные определения ничего не могут дать имитационному моделированию с практической точки зрения. Тем не менее, в монографии А.Г. Куроша «Теория групп» (60-ые годы), наряду с традиционным взглядом на изоморфизм как взаимно однозначное соответствие, появляется замечательная в концептуальном смысле фраза: **«Понятие изоморфизма не является понятием, специфичным для алгебры»**. Соответственно, гомоморфизм вводится как обобщение понятия изоморфного отображения в случае отказа от требования взаимной однозначности.

В отличие от алгебраистов-классиков, авторы более новых монографий и пособий по прикладной математике сначала определяют, что такое гомоморфизм, а уже затем переходят к изоморфизму как частному случаю гомоморфизма. Так, В.П. Сигорский, вводя понятие гомоморфизма через отображение двух множеств друг в друга, определяет изоморфизм как взаимно-однозначный (биективный) гомоморфизм [13, с. 155-156] (отмечая, что изоморфные множества обладают одинаковыми свойствами относительно определенных на них операций). Аналогично у Ф.А. Новикова: «Гомоморфизм, который является биекцией, называется изоморфизмом» [8, с. 55]. Сам же гомоморфизм понимается как отображающая операция особого рода алгебры A на алгебру B (причем обе алгебры одинакового типа). И снова – наводящий на раздумья тезис: **«Понятие изоморфизма является одним из центральных понятий, обеспечивающих применимость алгебраических методов в различных областях»** [там же, с. 56].

Если профессиональные математики в силу специфики рода занятий касаются в разной степени понятий изоморфизма и гомоморфизма, то специалисты по имитационному моделированию по ряду причин стараются этого избежать. Так, классическая во всех отношениях монография [5] В. Кельтона и А. Лоу не содержит никаких сведений по этому вопросу, крайне скупо сказано на эту тему и у Ю.И. Рыжикова в [12]. Однако уже В.Н. Томашевский недвусмысленно фиксирует роль изоморфизма и гомоморфизма как меры соответствия между исходной системой и моделью: система и модель изоморфны, если существует взаимнооднозначное соответствие между ними, благодаря которому можно преобразовать одно представление в другое; система и модель изоморфны только в случае упрощения системы, т.е. сокращения при моделировании множества ее свойств и характеристик поведения, влияющих на пространство состояний системы; примером менее тесных связей между системой и моделью являются гомоморфные связи, которые определяют однозначное соответствие только в одну сторону (от модели к системе) [14, с. 21-22]. Справедливости ради заметим, что о роли изоморфизма в моделировании значительно раньше, нежели Гастев и тем более Томашевский, написал Ст. Бир: «Изоморфный» означает имеющий аналогичную форму. Говорят, что одна система изоморфна другой, если по крайней мере формально они эквивалентны и взаимозаменяемы. <...>

Степень изоморфности математической модели «реальной» системе определяет достоверность получаемых при помощи модели предсказаний» [1] (Курсив мой – М.Р.).

Прояснив некоторые нюансы, мы теперь можем со спокойной совестью продолжить описание начатой выше процедуры отражения. Дополнительно примем к сведению, что модель, даже если она в чем-то проще исходного оригинала, не обязательно проще его во *всех* отношениях — а только в тех, в которых в данный момент специально заинтересован исследователь. Иными словами, реальная имитационная модель, будучи достаточно далекой от идеального «изоморфного» варианта, тем не менее не обязательно является «неструганным» и «занозистым» вариантом, «срубленным» при помощи гомоморфных сверток — напротив, некоторые блоки модели будут спроектированы с максимально достижимой точностью, а остальные будут загрублены в приемлемом диапазоне параметров (не выходя за пределы аксиоматики, принятой в начале моделирования).

(v) Понятие гомоморфизма, являющееся основным инструментом для *практически* точного описания различных процедур, объединяемых общим термином «моделирование», допускает ряд естественных обобщений, интересных прежде всего ввиду большого разнообразия и гибкости их логико-методологических интерпретаций. Если изучаемая система, как это часто бывает, задана частично (в т.ч. частично определены на ней операции и предикаты), то можно *доопределить систему* — как вариант, введя некую метрику и (или) топологию (т.н. топологическая интерпретация неполных изоморфизмов [3, с. 75-77; 9, с. 139]).

(vi) По мере уточнения исходной имитационной модели (особенно для сложных стохастических систем) представляется перспективным на очередной итерации *перейти к использованию в различных модификациях понятий нечетких множеств, отношений, свойств, предикатов, операций, отображений (морфизмов)*. Введение в оборот отношений, более общих, нежели эквивалентность, а также бесконечных последовательностей таких морфизмов, их суперпозиций позволит, по мнению автора, более естественным

для практических нужд образом отразить хаотичность и слабую предсказуемость большого числа экономических процессов.

Зададимся вопросом: зачем вообще необходимы достаточно абстрактные категории — изоморфизм и гомоморфизм — в имитационном моделировании? Можно ли каким-нибудь образом обойтись без них, строя модели как прораб — без доказательств, теорем и т.п.? Известно, что изоморфизм предполагает не только тождество (одинаковость, равночисленность) структуры, но и тождество функционирования для модели и ее прообраза. Однако построение моделей сложных систем крайне редко приводит к полному изоморфизму, а в случае очень сложных систем по Биру (как следует из самого их определения) степень изоморфности модели реальной системе невозможно проверить никаким известным на сегодня способом. Поэтому исследуемую систему необходимо предварительно упростить, применив к ней *однозначное лишь в одну сторону* преобразование. Упрощение наобум, без веских оснований по каждому исключаемому из рассмотрения фактору (параметру), без подтверждения корректности проводимой гомоморфной свертки вряд ли позволит создать адекватную имитационную модель. Обосновывая естественность понятия гомоморфизма, Гастев отмечал: «Поскольку полнота и точность воспроизведения внешнего мира в человеческом сознании всегда относительны (а о «взаимной однозначности» вообще не может быть речи), то соответствия между сколько-нибудь обширными совокупностями предметов внешнего мира и их образами в человеческом сознании никоим образом не могут быть изоморфными (даже относительно самых «скромных» наборов атрибутов), а должны носить более общий характер» [3, с. 30]. Таким образом, главнейшая *методологическая функция гомоморфного преобразования* заключается в логически непротиворечивой свертке всей доступной исследователю информации об изучаемых системах, объектах, процессах в емкую, компактную, легкообозримую и удобную для обработки форму (за вычетом несущественных данных и информационного шума).

Разумеется, концепция, согласно которой процесс формализации имитационной модели может быть описан в терминах гомоморфизмов, не лишена очевидных недостатков. Вряд ли произвольный фрагмент предметной области может быть представлен в виде гомоморфного образа-модели в случае, когда из пресловутой тройки критериев проекта {*качество; стоимость; сроки*} предполагается оптимизировать хотя бы 2 критерия. Более того, специфика современных бизнес-процессов такова (особенно в финансово-кредитной сфере), что была бы неоправданной авантюрой попытка отразить в виде некой алгебраической системы полный бизнес-цикл хотя бы безбалансового отделения банка. «Изоморфный на все 100%» идеал труднодостижим в силу стохастического характера экономических процессов, посему приходится довольствоваться гомоморфными моделями, приемлемыми с точки зрения практики. С другой стороны, автор не видит особых затруднений в том, чтобы интересующий в академическом или прикладном плане произвольный сегмент реальной экономики представить в качестве *частичной* алгебраической системы (т.е. множества объектов, на *подмножествах* которого определены некоторые операции и предикаты) — а после этого для таких частичных систем ввести соответствующие гомоморфизмы (см., например, [9]).

В свете сказанного особый интерес представляют присутствующие на международном рынке коммерческие разработки, автоматизирующие (пусть и для конкретных отраслей экономики) процесс трансформации концептуальной модели в компьютерную, пригодную для экспериментов. Так, в работе [16] и ряде сопутствующих ей рассматривается методология IPED (Isomorphic Permuted Experimental Designs), ориентированная на применение в такой далекой от оснований математики области, как маркетинговые исследования потребительских предпочтений. Будучи принципиально новым инструментом в моделировании обратной связи между компанией-производителем и ее клиентами, IPED облегчает проведение численных экспериментов на ЭВМ с многопараметрическими моделями, для которых присущ синергетический эффект как по подмножествам, так и по всей совокупности факторов. В

частности, благодаря программно сгенерированным рандомизированным перестановкам, произведенным над оригинальным проектом Web-сайта, удалось автоматически получить несколько сот изоморфных версий исходного проекта, которые были статистически уникальны для данного случая. Как результат, существенно большее число респондентов-потребителей смогли за меньшее время многократно протестировать каждую возможную комбинацию элементов Web-страницы – что в конечном счете позволило компании лучше приспособить свой корпоративный портал к запросам клиентов.

Заключение

Подведем итоги сказанному выше. По глубокому убеждению автора, доказательство корректности гомоморфной свертки всей доступной информации об исследуемых процессах в емкую и удобную для моделирования форму – абсолютно необходимый шаг на пути создания реалистической имитационной модели. Формализация процедуры гомоморфного отображения (и, соответственно, подтверждения ее корректности) – вопрос более чем открытый. В свою очередь, задача полной автоматизации (компьютеризации) процедуры формализации не менее далека от решения в коммерческих системах имитационного моделирования (в самом деле, нельзя же полагать, что применение рассчитанных на сокращение сроков разработки средств визуального моделирования в состоянии заменить логически непротиворечивые действия, продвигающие исследователя от концептуальной модели к программному коду, пригодному для решения реальных задач). В качестве одного из вариантов решения проблемы предлагается сконцентрировать усилия на создании гибридных («интеллектуальных») имитационных моделей, использующих не только ставшие уже привычными методы системного анализа, теории массового обслуживания или реинжиниринга бизнес-процессов – но также опирающиеся на логико-алгебраические схемы (в т.ч. аппарат неклассической логики и алгебраические структуры).

Благодарности

Автор хотел бы выразить глубокую признательность двум замечательным алгебраистам, В.Я. Шварцу и В.М. Усенко (к сожалению, безвременно ушедшим от нас) – которые в свое время, сами того не подозревая, приложили много усилий к тому, чтобы настоящие заметки появились на свет. Особая благодарность за дружеское отношение и содействие – д-ру Алексу Гофману (Alex Gofman) из Pace University, чьи талант, трудолюбие и упорство, направленные на воплощение brainware в software, еще предстоит оценить по достоинству в полной мере. Разнообразные плодотворные дискуссии и постоянное незримое присутствие А. Рафаловича (Aleksandr Rafalovich, UNO) в значительной мере помогли привести первоначальные отрывочные и хаотические «соображения по поводу...» в более-менее вразумительный, как надеется автор, вид.

Литература:

1. Бир Ст. Кибернетика и менеджмент: Пер. с англ. / Под ред. А.Б. Челюсткина. – Изд. 2-е. – М.: КомКнига, 2006. – 280 с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – 2-е изд., перераб., доп. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Гастев Ю.А. Гомоморфизмы и модели (логико-алгебраические аспекты моделирования). – М.: Наука, 1975. – 152 с.
4. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. – К.: Наукова думка, 1974. – 328 с.
5. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. – СПб.: Питер; К.: BHV, 2004. – 847 с.
6. Кухтенко А.И. Кибернетика и фундаментальные науки. – К.: Наукова думка, 1987. – 141 с.

7. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
8. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2002. – 304 с.
9. Румянцев М.И. К проблеме формализации бизнес-процессов коммерческого банка // Культура народов Причерноморья. – 2007. – № 120. – с. 137-141.
10. Румянцев М.И. К вопросу оценки адекватности имитационных моделей банковских бизнес-процессов // Сб. научных трудов по материалам международной научно-практ. конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании '2010». Том 15. Экономика. – Одесса: Черноморье, 2010. – с. 84-93.
11. Румянцев М.И. Замечания по поводу самотестируемости имитационных моделей банковских бизнес-процессов // Сб. научных трудов по материалам международной научно-практ. конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований '2011». Том 11. Экономика. – Одесса: Черноморье, 2011. – с. 26-29.
12. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. – 384 с.
13. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1975. – 768 с.
14. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К.: Видавнича група BHV, 2005. – 332 с.
15. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств: Пер. с англ. / Под ред. А.С. Есенина-Вольпина. – М.: Мир, 1966. – 555 с.
16. Gofman A., Moskowitz H. Isomorphic permuted experimental designs and their application in conjoint analysis // Journal of Sensory Studies. – 2010. – Vol. 25., No. 1. – pp. 127-145.
17. Thompson J.R. Simulation: A Modeler's Approach. – John Wiley & Sons, 2000.

Румянцев М.И. Изоморфизм и гомоморфизм в имитационном моделировании // Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. – 2011. – № 4. – <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/economy-411/quantitative-methods-in-economics-411/10754-411-0215>